Přijímací zkoušky do NMS 2013   MATEMATIKA, zadání A,    jméno:

**V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.**

---

**1.** Determinant matice **A** je různý od nuly právě tehdy, když matice **A** je
**a)** obdélníková **b)** čtvercová **c)** trojúhelníková **d)** regulární **e)** singulární (4b)

---

**2.** Soustava lineárních algebraických rovnic má právě dvě řešení právě tehdy, když determinant soustavy je **a)** roven nule **b)** různý od nuly
**c)** menší než nula **d)** větší než nula **e)** taková soustava neexistuje (4b)

---

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x} =$ **a)** $\dfrac{2}{3}$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $1$ **d)** $0$ **e)** $\infty$ (4b)

---

**4.** $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 y}e^y \sin x =$ **a)** $e^x \sin x$ **b)** $e^y \sin y$ **c)** $e^y \sin x$ **d)** $e^x \sin y$ **e)** $e^y$ (4b)

---

**5.** Uvažujme 31 studentů a náhodnou veličinu „tělesná výška jedince“. Studenty seřadíme podle velikosti a vybereme výšku šestnáctého z jich. Tímto způsobem jsme určili
**a)** průměrnou výšku **b)** rozptyl **c)** modus **d)** medián (4b)
**e)** žádná z uvedených odpovědí není správná

---

**6.** Pro každou distribuční funkci platí, že je
**a)** neklesající **b)** nerostoucí **c)** klesající **d)** rostoucí (8b)
**e)** žádná z uvedených odpovědí není správná

---

**7.** Je-li $M = \left\{[x,y,z]\in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 9\right\}$, pak $\iiint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ (8b)

**a)** $9\pi$ **b)** $27\pi$ **c)** $36\pi$ **d)** $1$ **e)** $0$

---

**8.** Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ může sloužit jako náhrada funkce (8b)
**a)** $f(x)=e^x$ **b)** $f(x)=\sin x$ **c)** $f(x)=\cos x$ **d)** $f(x)=\ln x$ **e)** $f(x)=\mathrm{tg}x$

---

**9.** Obecným řešením diferenciální rovnice $y''-2y'+y=0$ je **a)** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ (8b)
**b)** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ **c)** $y=C_1e^x+xC_2e^x$ **d)** $y=e^{x-1}(3-2x)$ **e)** $y=e^{x^2-2x+1}$

---

**10.** Pravděpodobnost, že při třech hodech ideální šestistěnnou hrací kostkou padne aspoň jedna šestka, je

a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{91}{216}$ d) $\dfrac{125}{216}$ e) $\dfrac{215}{216}$ (8b)

---

**Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.**

**11.** Určete definiční obor a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

---

Řešení:

$D(f) = \mathbb{R}^+$ 2 body

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-1}\ln^2 x\right] = -x^{-2}\ln^2 x + 2x^{-2}\ln x = \dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$ 4 body

stac. body:

$\dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = e^2$ 7 bodů

extrémy

$$\left.\begin{aligned} x \in (0;1) &\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x) < 0 \\ x \in (1;e^2) &\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x) > 0 \\ x \in (e^2;\infty) &\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2-\ln x) < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1 = 1 \ \text{minimum} \\ &x_2 = e^2 \ \text{maximum} \end{aligned}$$ 7 bodů

**12.** Načrtněte plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x$; $g(x) = x^5$ a určete její obsah.

---

Řešení:

Náčtek 2 body

Meze integrálu 4 body

$S = \int_{-1}^{0}\left(x^5 - x\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(x - x^5\right)\mathrm{d}x$, popř. $S = 2\int_{0}^{1}\left(x - x^5\right)\mathrm{d}x$ 7 bodů

$S = 2\int_{0}^{1}\left(x - x^5\right)\mathrm{d}x = 2\left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^6}{6}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$ 7 bodů

Přijímací zkoušky do NMS 2013   MATEMATIKA, zadání B,  jméno:

**V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.**

**1.** K matici $\mathbf{A}$ existuje matice inverzní právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je  (4b)

**a)** obdélníková  **b)** čtvercová  **c)** trojúhelníková  **d)** regulární  **e)** singulární

**2.** Soustava lineárních algebraických rovnic má právě tři řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy je  (4b)

**a)** 0  **b)** 1  **c)** 2  **d)** 3  **e)** taková soustava neexistuje

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=$  **a)** $\dfrac{2}{3}$  **b)** $\dfrac{3}{2}$  **c)** 1  **d)** 0  **e)** $\infty$  (4b)

**4.** $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x}e^x\sin y=$  **a)** $e^x\sin x$  **b)** $e^y\sin y$  **c)** $e^y\sin x$  **d)** $e^x\sin y$  **e)** $e^y$  (4b)

**5.** Uvažujme skupinu sta studentů a náhodnou veličinu „hodnocení u zkoušky“ (stupněm 1 – 6). Zapíšeme-li hodnocení, které se vyskytuje nejčastěji, určili jsme:  (4b)
**a)** průměrné hodnocení  **b)** rozptyl  **c)** modus  **d)** medián
**e)** žádná z uvedených odpovědí není správná

**6.** Pro hustotu pravděpodobnosti $p(x)$ každé spojité náhodné veličiny je $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=$  (8b)

**a)** 0  **b)** 1  **c)** $-1$  **d)** $\infty$  **e)** integrál není definován

**7.** Mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ může sloužit jako náhrada funkce  (8b)

**a)** $f(x)=e^x$  **b)** $f(x)=\sin x$  **c)** $f(x)=\cos x$  **d)** $f(x)=\ln x$  **e)** $f(x)=\mathrm{tg}x$

**8.** Je-li $\kappa=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2=4\right\}$, pak $\int_\kappa \mathrm{d}s=$  (8b)

**a)** $4\pi$  **b)** $9\pi$  **c)** $27\pi$  **d)** 1  **e)** 0

**9.** Obecným řešením diferenciální rovnice $y''+2y'+y=0$ je  **a)** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$  (8b)
**b)** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$  **c)** $y=C_1e^{-x}+xC_2e^{-x}$  **d)** $y=e^{x-1}(3-2x)$  **e)** $y=e^{x^2+2x+1}$

**10.** Pravděpodobnost, že při třech hodech ideální šestistěnnou hrací kostkou nepadne ani jedna šestka, je

a) $\dfrac{1}{6}$  b) $\dfrac{5}{6}$  c) $\dfrac{91}{216}$  d) $\dfrac{125}{216}$  e) $\dfrac{215}{216}$  (8b)

**Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.**

11. Určete definiční obor a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$.

---

Řešení:

$D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ 2 body

$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x \ln^{-2} x\right] = \ln^{-2} x - 2\ln^{-3} x = \dfrac{1}{\ln^2 x}\left(1 - \tfrac{2}{\ln x}\right)$ 4 body

stac. body:

$\dfrac{1}{\ln^2 x}\left(1 - \tfrac{2}{\ln x}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = e^2$ 7 bodů

extrémy

$$\left.\begin{aligned} x \in (1; e^2) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x}\left(1 - \tfrac{2}{\ln x}\right) < 0 \\ x \in (e^2; \infty) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x}\left(1 - \tfrac{2}{\ln x}\right) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = e^2 \quad \text{minimum}$$ 7 bodů

12. Načrtněte plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x$; $g(x) = x^3$ a určete její obsah.

---

Řešení:

Náčtek 2 body
meze integrálu 4 bodů

$S = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x$, popř. $S = 2\int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x$ 7 bodů

$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}$ 7 bodů

Přijímací zkoušky do NMS 2013 MATEMATIKA, zadání C, jméno:

**V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.**

---

**1.** Determinant matice $\mathbf{A}$ neexistuje právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je
**a)** obdélníková **b)** čtvercová **c)** trojúhelníková **d)** regulární **e)** singulární 4b

---

**2.** Soustava lineárních algebraických rovnic má právě dvě řešení právě tehdy, když determinant soustavy je **a)** roven nule **b)** různý od nuly
**c)** menší než nula **d)** větší než nula **e)** taková soustava neexistuje 4b

---

**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2}=$ **a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\infty$ **d)** 0 **e)** neexistuje 4b

---

**4.** $\frac{\partial^2}{\partial^2 y}e^y\cos x=$ **a)** $e^x\cos x$ **b)** $e^y\cos y$ **c)** $e^y\cos x$ **d)** $e^x\cos y$ **e)** $e^y$ 4b

---

**5.** Uvažujme 31 studentů a náhodnou veličinu „prospěch u zkoušky" (hodnocený stupněm 1 - 6). Studenty seřadíme podle prospěchu a vybereme prospěch šestnáctého z nich. Tímto způsobem jsme určili 4b

**a)** průměrnou výšku **b)** rozptyl **c)** modus **d)** medián
**e)** žádná z uvedených odpovědí není správná

---

**6.** Součet všech hodnot pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny je roven
**a)** 1 **b)** 0 **c)** $-1$ **d)** $\infty$ **e)** součet neexistuje 8b

---

**7.** Je-li $M=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 16\right\}$, pak $\iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 8b

**a)** $9\pi$ **b)** $27\pi$ **c)** $16\pi$ **d)** 1 **e)** 0

---

**8.** Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ může sloužit jako náhrada funkce 8b
**a)** $f(x)=e^x$ **b)** $f(x)=\sin x$ **c)** $f(x)=\cos x$ **d)** $f(x)=\ln x$ **e)** $f(x)=\mathrm{tg}x$

---

**9.** Obecným řešením diferenciální rovnice $y''-4y'+3y=0$ je **a)** $y=-4C_1e^x+3C_2e^x$ 8b
**b)** $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}$ **c)** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ **d)** $y=e^{x-1}(3-4x)$ **e)** $y=e^{x^2-4x+3}$

---

**10.** Pravděpodobnost, že při třech hodech ideální šestistěnnou hrací kostkou padne aspoň dvakrát šestka, je
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{216}$ c) $\frac{16}{216}$ d) $\frac{126}{216}$ e) $\frac{90}{216}$ 8b

---

**Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.**

**11.** Určete definiční obor a inflexní body funkce $f(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right) \cdot e^x$.

---

Řešení:

| | |
|---|---|
| $D(f) = \mathbb{R}$ | 1 bod |
| $f'(x) = (2x-3) \cdot e^x + \left(x^2 - 3x + 2\right)e^x = \left(x^2 - x - 1\right)e^x$ | 4 body |
| $f''(x) = (2x-1)e^x + \left(x^2 - x - 1\right)e^x = \left(x^2 + x - 2\right)e^x$ | 4 body |
| stac. body: | |
| $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1$ | 3 body |
| inflexe | |
| $f'(x_1) = f'(-2) > 0$ inflexe | 4 body |
| $f'(x_2) = f'(1) < 0$ inflexe | 4 body |

**12.** Načrtněte plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^3$; $g(x) = x^5$ a určete její obsah.

---

Řešení:

| | |
|---|---|
| Náčtek | 2 body |
| Meze integrálu | 4 body |
| $S = \int_{-1}^{0}\left(x^5 - x^3\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(x^3 - x^5\right)\mathrm{d}x$, popř. $S = 2\int_{0}^{1}\left(x^3 - x^5\right)\mathrm{d}x$ | 7 bodů |
| $S = 2\int_{0}^{1}\left(x^3 - x^5\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ | 7 bodů |

Přijímací zkoušky do NMS 2013 MATEMATIKA, zadání D, jméno:

**V následujících deseti problémech je z nabízených odpovědí vždy právě jedna správná. Zakroužkujte ji! Za každou správnou odpověď získáte uvedené body. Za nesprávnou odpověď se odečítá čtvrtina uvedené hodnoty.**

**1.** Determinant matice $\mathbf{A}$ je roven nule právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je
**a)** obdélníková **b)** čtvercová **c)** trojúhelníková **d)** regulární **e)** singulární 4b

**2.** Soustava lineárních algebraických rovnic má řešení právě tehdy, když determinant soustavy je **a)** roven nule **b)** různý od nuly **c)** menší než nula **d)** větší než nula **e)** žádná předchozí odpověď není správná 4b

**3.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{2x^2}=$ **a)** 2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\infty$ **d)** 0 **e)** neexistuje 4b

**4.** $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}e^y\cos x=$ **a)** $e^x\cos x$ **b)** $e^y\cos y$ **c)** $e^y\cos x$ **d)** $-e^y\cos x$ **e)** $e^y$ 4b

**5.** Uvažujme skupinu 31 studentů a náhodnou veličinu „studijní průměr za bakalářské studium“. Studenty seřadíme podle tohoto průměru a vybereme průměr šestnáctého z nich. Tímto způsobem jsme určili 4b

**a)** průměrný prospěch skupiny **b)** rozptyl náhodné veličiny
**c)** modus náhodné veličiny **d)** medián náhodné veličiny
**e)** žádná z uvedených odpovědí není správná

**6.** Pro obor hodnot $H$ každé distribuční funkce $F(x)$ platí

**a)** $H=\mathbb{R}$ **b)** $H=(-\infty;1\rangle$ **c)** $H\subseteq\langle 0;1\rangle$ **d)** $H=\langle -1;1\rangle$ **e)** $H=\langle 1;\infty)$ 8b

**7.** Je-li $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \mid y\le 1-x;\ \ x;y\ge 0\}$, pak $\int\int_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 8b

**a)** 2 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{3}$ **e)** 0

**8.** Řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ **a)** konverguje absolutně **b)** konverguje relativně 8b
**c)** osciluje **d)** diverguje **e)** žádná předchozí odpověď není správná

**9.** Obecným řešením diferenciální rovnice $y''+y=0$ je **a)** $y=C_1x+C_2x$ 8b
**b)** $y=C_1e^x+C_2e^x$ **c)** $y=C_1e^x+C_2\sin x$ **d)** $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ **e)** $y=e^{x^2+1}$

**10.** Pravděpodobnost, že při třech hodech ideální šestistěnnou hrací kostkou padne aspoň dvakrát trojka, je

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{216}$ c) $\frac{16}{216}$ d) $\frac{126}{216}$ e) $\frac{90}{216}$ 8b

**Řešte následující úlohy. Za zcela správně vyřešenou úlohu získáte 20 bodů. Boduje se každý správný krok. Za chyby v řešení se body neodečítají.**

**11.** Určete definiční obor, lokální extrémy a inflexní body funkce $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

---

Řešení:

| | | |
|---|---|---|
| $D(f) = \mathbb{R}$ | | 1 bod |
| $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xe^{-x}\right] = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ | | 4 body |
| $f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{-x} - xe^{-x}\right] = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = xe^{-x} - 2e^{-x} = e^{-x}(x-2)$ | | 4 body |
| stac. body: | | |
| $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ | | |
| $f''(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ | | 3 body |
| extrém: | | |
| $f''(x_1) = f''(1) < 0$ | maximum | 4 body |
| inflexe | | |
| $f'(x_2) = f'(2) < 0$ | inflexe | 4 body |

**12.** Načrtněte plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^4$; $g(x) = |x|$ a určete její obsah.

---

Řešení:

| | |
|---|---|
| Náčtek | 2 body |
| Meze integrálu | 4 body |
| $S = \int_{-1}^{0}\left(-x - x^4\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\left(x - x^4\right)\mathrm{d}x$, popř. $S = 2\int_{0}^{1}\left(x - x^4\right)\mathrm{d}x$ | 7 bodů |
| $S = 2\int_{0}^{1}\left(x - x^4\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$ | 7 bodů |